Chapitre : Généralités sur les probabilités

I- Notion sur les ensembles

1°) Notations

a) **Définition**
Un ensemble est une collection d'objets clairement définis appelés éléments de cet ensemble.

Notation : Les ensembles sont le plus souvent notés par une lettre majuscule, les éléments de l'ensemble sont énumérés entre accolades.
Exemples :
E={1;2;3;4;5;6}
V="l'ensemble des voyelles"
donc V={a;o;u;i;e;y}
remarque : L'ordre d'énumération n'a pas d'importance.
par exemple : E={1;2;3;4;5;6}={3;4;1;2;6;5}

b) **Les symboles $\in$ et $\notin$.**

Reprenons l'ensemble E={1;2;3;4;5;6}.
On écrit : $2 \in E$ et on lit "2 appartient à E".
On écrit : $7 \notin E$ et on lit "7 n'appartient pas à E".

c) **L'ensemble vide**

Il existe un seul ensemble qui n'a aucun élément. On l'appelle ensemble vide.
Il est noté : $\emptyset$ ou bien {}.
On a donc $\emptyset$={}
Attention : l'ensemble {$\emptyset$} n'est pas vide, il contient un élément qui est l'ensemble vide.

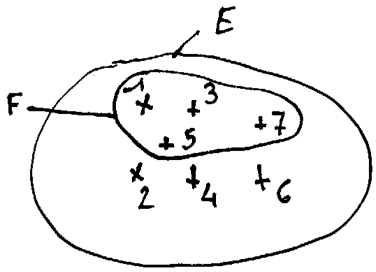
d) **Diagramme de Venn**.

Pour représenter un ensemble, on peut dessiner un diagramme de Venn (ou "patate") où l'on dessine les éléments à l'interieur de la patate.

Par exemple E={1;2;3;4;5;6} sera représenté par le diagramme suivant :

e) **<u>Sous ensemble d'un ensemble</u>**

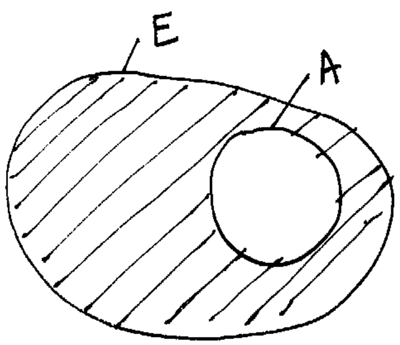
<u>Exemple</u> : Soit E l'ensemble : E={1;2;3;4;5;6;7}
L'ensemble R={1;3;5;7} est un sous ensemble de E
On peut les représenter par le diagramme suivant :

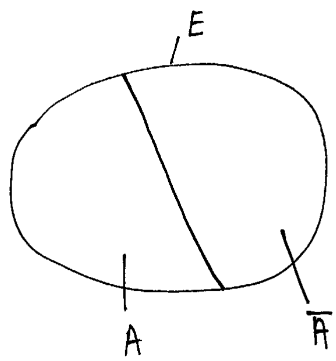


On constate que tous les éléments de F sont aussi dans E . On dit que F est un sous ensemble de E ou que F est une partie de E ou encore que F est inclus dans E.
<u>On note</u> F⊂E est on lit :"F est inclus dans E"

f) **<u>Complémentaire d'une partie</u>**

Soit E un ensemble et A un sous ensemble de E
La partie complémentaire de A dans E est la partie formée de tous les éléments de E qui ne sont pas dans A. On la note $\overline{A}$.
On peut le schématiser de deux manières

<table>
<tr><th>Première manière</th><th>Deuxième manière</th></tr>
<tr><td>

La partie hachurée correspond à $\overline{A}$</td><td>
</td></tr>
</table>

g) **<u>Cardinal d'une partie</u>**

Le cardinal d'une partie A est le nombre d'élément de cet ensemble. On note Card(A).
<u>Exemple</u> : E={1;2;3;4;5;6} ; A={1;3;5} ; B={5}
On a Card(E)=6, Card(A)=3 et Card(B)=1

2°) <u>Intersection, réunion de deux ensembles</u>

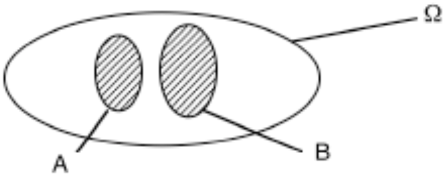
Soit E l'ensemble : E={1;2;3;4;5;6;7;8;9}

Soient A et B les parties de E suivantes :
A={1;2;3;4;5} et B={4;5;6;7}
Représenter ces deux ensembles par un diagramme.

Citer les éléments qui appartiennent à A et à B :______________________________
Citer les éléments qui appartiennent à A ou à B :______________________________

<u>Définition</u>:	•L'ensemble des éléments qui appartiennent à A et à B est appelé l'intersection de A et de B, on le note : $A \cap B$. •L'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B est appelé la réunion de A et de B, on le note : $A \cup B$.

<u>Important!</u> Si on a deux parties A et B telles que $A \cap B = \emptyset$ alors on dit que A et B sont <u>disjoints</u>. Dans ce cas la réunion AUB est dite disjointe



Sur la figure on a : A disjoint de B.

Lorsque A est disjoint de B alors $Card(A \cup B)=Card(A)+Card(B)$.

<u>Exercice1</u> :
Lorsque A est disjoint de B alors $Card(A \cup B)=Card(A)+Card(B)$.
Qu'en est-il pour cette dernière formule lorsque A et B ne sont pas disjoints?

<u>Exercice2</u> :
Soit Ω l'ensemble suivant: $\Omega=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12\}$.
1°) On définit par A l'ensemble des nombres paires de Ω, par B les nombres impaires de Ω et par C les nombres divisibles par 3 de Ω. Expliciter A,B et C.
2°) Déterminer $A \cap C$; $B \cap C$; $A \cap B$; $A \cup C$ et $\overline{A}$.
3°) Vérifier sur cet exemple que $Card(A \cup C)=Card(A)+Card(C)-Card(A \cap C)$

<u>Exercice3</u> :
1°) On effectue une enquête auprès des lecteurs de trois revues notées a, b, c. On obtient les résultats suivants: sur 100 personnes interrogées, 57 lisent a, 42 lisent b, 38 lisent c, 22 lisent a et b, 14 lisent b et c, 16 lisent a et c, 8 lisent a, b et c. A l'aide d'un diagramme de Venn, trouver le nombre de personnes:

a) Qui ne lisent que a et b, que b et c, que a et c;

b) Qui ne lisent que a, que b, que c;

c) qui ne lisent aucune des trois revues.

II-Notion d'épreuves aléatoires.

1°) Univers.

Dans de nombreux cas une même épreuve (ou expérience aléatoire), répétée plusieurs fois dans des conditions identiques, ne conduit pas toujours au même résultat. Par exemple, lorsqu'on lance une pièce de monnaie on ne peut pas prévoir si elle retombera sur pile ou face. De même si on lance un dé, on ne peut pas prévoir le chiffre obtenu.

Si, comme dans les situation précédentes, l'issue d'une épreuve ne peut être déterminée avant sa réalisation, nous dirons qu'il s'agit d'une épreuve aléatoire ou d'une expérience aléatoire.

Lors d'une épreuve aléatoire, on associe l'ensemble de tous les cas possibles Ω (c'est l'univers: il dépend de l'épreuve aléatoire). Les éléments de Ω sont appelés événements élémentaires.

Exercice4: Dans chacun des cas suivants, définissez les événements élémentaires de l'épreuve proposé à partir d'un ensemble Ω que vous préciserez.

a) On lance une pièce de monnaie.
b) On tire une carte dans un jeux de 32 cartes.
d) D'une urne contenant quatre boules numérotées 1,2,3,4 on tire simultanément deux boules.

2°) Événement.

Notons Ω l'ensemble des cas possibles, associé à une épreuve. On appelle événement toute partie E de Ω. Un événement est donc la réunion d'événements élémentaires.

Exemple: lancé d'un dé. A l'événement:"il sort un nombre pair". Dire que l'événement A est réalisé signifie que lors d'une épreuve, l'un des événements élémentaires que contient A s'est réalisé.

Événements particuliers: On note Ω l'univers.

- Ω est une partie de lui-même: on dit que c'est l'événement certain.
- $\emptyset$ est une partie de Ω : on dit que c'est l'événement impossible.

3°) Événement contraire.

L'événement contraire d'un événement A est la partie complémentaire de A dans Ω , on la note $\overline{A}$.

Exemple: lancé d'un dé. $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$.

L'événement A="apparition d'un nombre pair"={2;4;6}

L'événement contraire $\overline{A}$ ={1;3;5}="apparition d'un nombre impair".

4°) Intersection et réunion d'événements:

A et B sont deux événements, parties d'un même univers W.

L'intersection $A\cap B$ est l'événement qui est réalisé lorsque les événements A et B sont réalisés simultanément.

La réunion $A\cup B$ est l'événement qui est réalisé lorsque au moins un des événements A ou B est réalisé.

Exercice5: D'une urne contenant dix boules numérotées de 1 à 10, on tire une boule. On définit les événements suivants:

A="avoir tiré une boule impaire"

B="avoir tiré une boule dont le numéro est inférieur à 6"

1°) Définir par une phrase les événements $A\cap B$ et $A\cup B$.

2 °) Les expliciter en donnant leurs éléments.

5°) Événements incompatibles:

A et B sont dits incompatibles lorsqu'ils ne peuvent pas avoir lieu en même temps, c'est à dire lorsque $A\cap B=\emptyset$.

III-Probabilités.

1°) Loi de probabilité

Soit $\Omega=\{ e_1 ; e_2 ; ... ; e_n \}$ un ensemble fini.
Une probabilité P sur Ω est une fonction de Ω dans [0; 1] vérifiant:

$$P(e_1)+P(e_2)+\ldots+P(e_n)=1$$

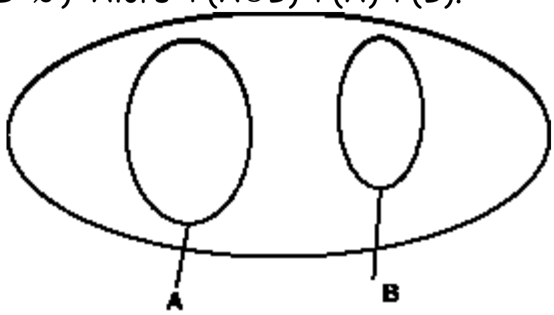
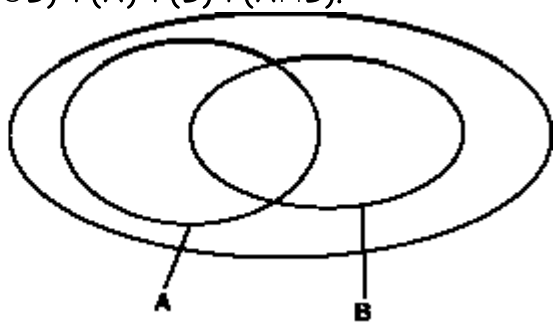
On dit aussi que $P(e_1)$, $P(e_2)$, . . . , $P(e_n)$ définissent une loi de probabilité sur Ω.

2°) Événement

Définitions:
Soit Ω un ensemble fini muni d'une loi de probabilité P.
Un événement de Ω est un sous-ensemble A de Ω.
Si on pose A={ a_1 ; a_1 ; … ; a_m }.
La **probabilité de l'événement A** est par définition:

$$P(A)=P(a_1)+P(a_2)+\ldots+P(a_m) \ .$$

Probabilité de $A\cup B$.
Soient A et B deux événement de Ω.

Si A et B sont disjoints (cela signifie que $A\cap B=\emptyset$) Alors $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$. 	**Dans le cas général, on a :** $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$. 

Probabilité de l'événement contraire.

Soit A un événement de Ω.

L'événement contraire de A est l'événement $\overline{A}$ et on a:

$$\boxed{P(\overline{A})=1-P(A)}$$

Exercice 6

Une entreprise fabrique des «puces» électroniques qui peuvent présenter deux défauts de fabrication. Une étude statistique a montré que:

•20% des pièces présentent le défaut A.

•24% des pièces présentent le défaut B.

•15% des pièces présentent les deux défauts.

Calculer la probabilité des événements suivants:

E:« la puce a au moins l'un des deux défauts»;

F:« la puce a un défaut et un seul »;

G:« la puce a le défaut A seulement »;

H:« la puce a le défaut B seulement »;

I:« la puce n'a aucun des deux défauts ».

3°) Équiprobabilité

Soit $\Omega=\{\ e_1\ ;e_2\ ;\ \ldots\ ;e_n\}$ un ensemble fini. On dit qu'une loi de probabilité P sur est équirépartie, ou qu'il y a une équiprobabilité sur si, et seulement si

$$P(e_1)=P(e_2)=\ldots=P(e_n)=\frac{1}{n}$$

Soit A un événement de . En situation d'équiprobabilité, sa probabilité est alors:

$$P(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}=\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Remarque: Par convention, les expressions telles que pièces ou dés équilibrés, tirage au hasard, jetons ou boules indiscernables au toucher, indiquent le choix d'un modèle avec **loi équirépartie**.

4°) Evénements indépendants

Définition:	Deux événements A et B sont dits indépendants lorsque : $P(A\cap B)=P(A).P(B)$

Exemple 1 : Un individu 1 lance un dé par exemple à Paris. En même temps un individu 2 lance un dé à Londres.
On note A= "L'individu 1 obtient 6 " et B="L'idividu 2 obtient 6"
alors $A\cap B$=" L'individu 1 obtient 6 et L'idividu 2 obtient 6".
Ces deux événements sonts indépendants, donc $P(A\cap B)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$.

Exemple 2 : Si je m'intéresse à ma voiture et si je considère les événements suivants :
A="mon alternateur est en panne" et B="ma voiture démarre ".
Manifestement ces deux événements ne sont pas indépendants.

Remarque : Ne pas confondre événements incompatibles et événements indépendants.