

### Exercice 3

On considère  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(t) = 2$  sur  $[0; \frac{\pi}{2}]$  et  $f(t) = 0$  sur  $]\frac{\pi}{2}; \pi[$ . De plus  $f$  est une fonction paire et  $2\pi$ -périodique.

1) Dessiner  $f$  sur  $[-\pi; 2\pi]$

2) Calculer  $a_0 = \frac{1}{2\pi} \times \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) dt$

3) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , calculer  $a_n = \frac{2}{2\pi} \times \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cos(n\omega t) dt$

4) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , calculer  $b_n = \frac{2}{2\pi} \times \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \sin(n\omega t) dt$

On appelle  $S(t) = a_0 + \sum_{n=1} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$  la série de Fourier associée à  $f$

5) Exprimer la somme partielle :  $S_5(t) = a_0 + \sum_{n=1}^5 a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$

6) Calculer le carré de la valeur efficace de  $f$ , noté  $V_{eff(f)}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(t) dt$

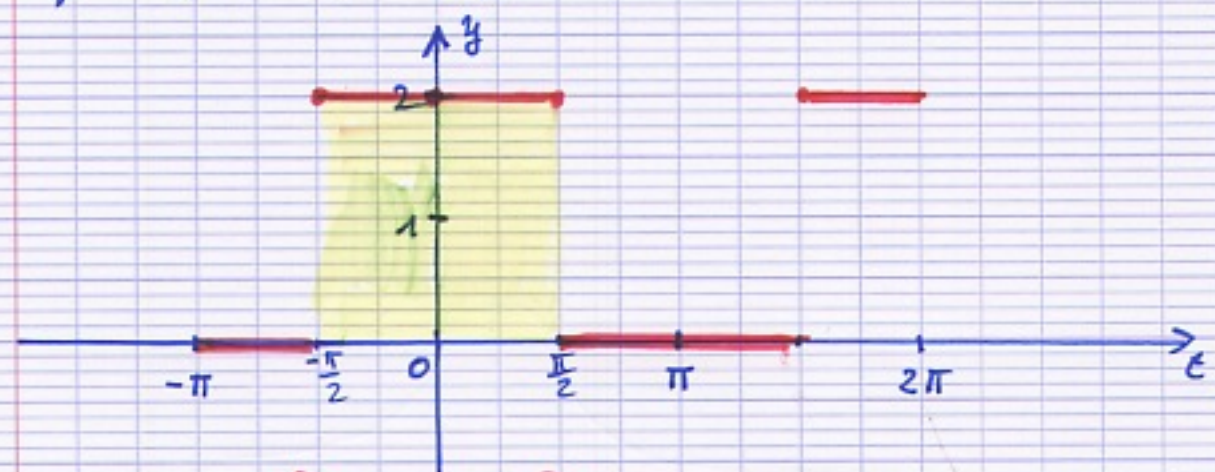
7) En utilisant l'égalité due au mathématicien Marc-Antoine Parseval des Chênes (1755-1836) qui démontre que

$$V_{eff(S_5)}^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \times \sum_{n=1}^5 a_n^2 + b_n^2, \text{ calculer } V_{eff(S_5)}^2$$

8) Montrer que le rapport  $\frac{V_{eff(S_5)}^2}{V_{eff(f)}^2}$  est proche de 1.

### Exercice 3

- 1°)  $\begin{cases} f(t) = 2 & \text{sur } [0; \frac{\pi}{2}] \\ f(t) = 0 & \text{sur } ]\frac{\pi}{2}; \pi[ \end{cases}$   
 $f$  est paire  
 $f$  est périodique de période  $2\pi$



- ② car  $f$  est paire  
 ① par définition sur  $[0; \pi[$   
 ③ par translation

2°)  $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \times (\underbrace{\pi \times 2}_{\text{aire du rectangle colorié}}) = 1$  (c'est la valeur moyenne)

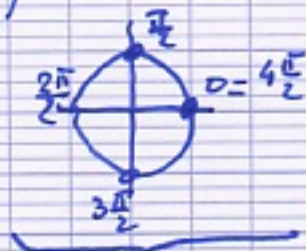
3°)  $a_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(mt) dt$        $\omega = 2\pi f = 2\pi \times \frac{1}{2\pi} = 1$

$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(mt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos(mt) dt$

$a_n = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{2 \sin(mt)}{m} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{2 \sin(\frac{n\pi}{2})}{m} - \frac{2 \sin(-\frac{n\pi}{2})}{m} \right)$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left( \frac{2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} \right)$$

$$a_n = \frac{4 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\pi \cdot n}$$



on remarque que  
 $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$  vaut  $\begin{cases} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$

4°) La fonction  $f$  est paire, donc  $\boxed{b_n = 0} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} 5^\circ) \quad a_0 &= 1 \\ a_1 &= \frac{4}{\pi} \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= -\frac{4}{3\pi} \\ a_4 &= 0 \\ a_5 &= \frac{4}{5\pi} \end{aligned}$$

$$b_1 = 0 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5$$

Donc  $S_5(t) = 1 + \frac{4}{\pi} \cos(t) - \frac{4}{3\pi} \cos(3t) + \frac{4}{5\pi} \cos(5t)$

$$6^\circ) \quad V_{eff}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4 dt = \frac{1}{2\pi} \times \pi \times 4 = 2$$

$$7^\circ) \quad V_{eff}^2(S_5) = 1^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{16}{\pi^2} + \frac{16}{9\pi^2} + \frac{16}{25\pi^2} \right) = 1,933$$

$$8^\circ) \quad \frac{V_{eff}^2(S_5)}{V_{eff}^2(f)} = \frac{1,933}{2} \approx 0,966 \quad \text{proche de } 1$$